22/11/2016

Θεωρία Αυτομάτων και Τυπικών Γλωσσών

(Απόδειξη (;;) 29/11/2016)

Ένας σχηματισμός είναι μια τριάδα (k, w, a) η οποία ανήκει $K^* \Sigma^* \Gamma$ όπου k η παρούσα κατάσταση του πεπερασμένου αυτόματος ελέγχου

w είναι το αχρησιμοποίητο τμήμα της αλυσίδας εισόδου, το πρώτο σύμβολο του w βρίσκεται κάτω από τη κεφαλή ανάγνωσης. Εάν $w = \epsilon$ τότε θεωρούμε ότι ολόκληρη η αλυσίδα έχει διαβαστεί

Το a παριστά το περιεχόμενο της στοιβάδας. Το αριστερότερο σύμβολο της a αντιστοιχεί στη κορυφή της στοιβάδας. Αν $a = \epsilon$ σημαίνει ότι η στοιβάδα είναι κενή.

Μια μετάβαση του A παριστάνεται από τη διαδική σχέση $\vdash_A$ ή $\vdash$ πάνω στους σχηματισμούς

· $(k, aw, za) \vdash (k', w, \gamma a)$

Αν το σύνολο $\mu(k, a, z)$ περιλαμβάνει το ζεύγος (k', γ) για κάθε

$k \in K$, $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$

$w \in \Sigma^*$
$z \in \Gamma$
$\gamma \in \Gamma^*$
$a \in \Gamma^*$

Όταν $\gamma = \epsilon$ αυτό σημαίνει ότι έλαβε χώρα διαγραφή του κόμβου της κορυφής της στοιβάδας. Η περίπτωση $a = \epsilon$ αφορά την κενή μετάβαση ή ϵ-μετάβαση. Σε μία ϵ-μετάβαση δεν λαμβάνεται υπόψη το σύμβολο εισόδου, η κεφαλή ανάγνωσης δεν κινείται αλλά η κατάσταση πεπερασμένου αυτόματος ελέγχου μπορεί να αλλάξει ~~και~~ το περιεχόμενο της μνήμης της στοιβάδας μπορεί να τροποποιηθεί.

Μια ϵ-μετάβαση μπορεί να λάβει χώρα ακόμα και όταν όλη η αλυσίδα εισόδου έχει διαβαστεί.

Όταν η στοιβάδα είναι κενή, δεν είναι δυνατόν να λάβει χώρα η μετάβαση.

Ορίζουμε τις σχέσεις:

$\vdash^{i}$ $i \geq 0$

$\vdash^{*}$ ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ΚΛΙΣΗ

$\vdash^{+}$ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ΚΛΙΣΗ

Ένας αρχικός σχηματισμός του Α έχει τη μορφή (κ_0, w, Z_0)

Ένας τερματικός σχηματισμός (κ, ε, a) όπου $\kappa \in T, a \in \Gamma^*$.

Λέμε ότι μία συμβολοσειρά w είναι αποδεκτή από το Α εάν

$(\kappa_0, w, Z_0) \vdash^{*} (\kappa, \varepsilon, a)$ για κάποια κ και a.

Η γλώσσα την οποία ορίζει το Α τη παριστάνουμε με $L(A)$ και είναι το σύνολο των συμβολοσειρών που αποδέχεται το Α.

Η $L(P)$ λέγεται γλώσσα αυτομάτου με στοίβα.

Παραλλαγές του ΠΑΣ

Λήμμα έστω το ΠΑΣ είναι ίσο με $P=(K, \Sigma, \Gamma, \mu, \kappa_0, Z, T)$

εάν $(\kappa, w, A) \vdash^{\mu} (\kappa', \varepsilon, \varepsilon)$, $w \in \Sigma^*$

τότε $(\kappa, w, A a) \vdash^{\mu} (\kappa', \varepsilon, a)$ $\forall A \in \Gamma$ & $a \in \Gamma^*$

Αυτό σημαίνει ότι ότι λαμβάνει χώρα στη κορυφή της στοίβας είναι ανεξάρτητο από αυτό που υπάρχει κάτω από τη κορυφή.

Θα επεκτείνουμε τον ορισμό του ΠΑΣ, έτσι ώστε να είναι δυνατή η αντικατάσταση μιας συμβολοσειράς πεπερασμένου μήκους στη κορυφή της στοίβας από συμβολοσειρά πεπερασμένου μήκους.

δηλαδή η συνάρτηση μ ορίζεται ως εξής:

$\mu : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^* \rightarrow K \times \Gamma^*$

(ΕΠΑΣ): Είναι μια επτάδα $P = (K, \Sigma, \Gamma, \mu, k_0, Z, T)$ όπου

$\mu : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^* \to K \times \Gamma^*$

όπου όλα τα άλλα σύμβολα είναι ταυτόσημα με το ΠΑΣ.

Ένας σχηματισμός ορίζεται όπως και στη προηγούμενη περίπτωση.

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΛΑΤΙΝΙΚΟΥ ΑΛΦΑΒΗΤΟΥ.

Εάν το $\mu(\kappa, \alpha, a)$ περιέχει το (κ', β) για $\kappa \in K$

$\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ & $a \in \Gamma^*$

Και η γλώσσα $L(E)$ είναι $L(E) = \{w / (k_0, w, Z) \vdash^* (\kappa, \varepsilon, a), \kappa \in T \ \& \ a \in \Gamma^*\}$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Αντίθετα με το τι συμβαίνει με τα ΠΑΣ, ένα ΕΠΑΣ μπορεί να κάνει μετάβαση και με κενή στοιβάδα

Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί ένα ΕΠΑΣ το οποίο αναγνωρίζει τη γλώσσα

$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Έστω ότι: $E = \{\{\kappa, \lambda\}, \{a,b\}, \ldots, \{ab, S, Z\}, \mu, \kappa, Z, \{\lambda\}\}$

$$
\begin{aligned}
(\kappa, aabbaa, Z) &\vdash (\kappa, abbaa, aZ) \\
&\vdash (\kappa, bbaa, aaZ) \\
&\vdash (\kappa, baa, baaZ) \\
&\vdash (\kappa, baa, SbaaZ) \\
&\vdash (\kappa, aa, bSbaaZ) \\
&\vdash (\kappa, aa, SaaZ) \\
&\vdash (\kappa, a, aSaaZ) \\
&\vdash (\kappa, a, SaZ) \\
&\vdash (\kappa, \varepsilon, aSaZ) \\
&\vdash (\kappa, \varepsilon, SZ) \\
&\vdash (\lambda, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Βάσει αυτών των σχηματισμών να οριστεί το μ:

$\mu(\kappa, a, \varepsilon) = \{(\kappa, a)\}$

$\mu(\kappa, b, \varepsilon) = \{(\kappa, b)\}$

$\mu(\kappa, \varepsilon, \varepsilon) = \{(\kappa, S)\}$

$\mu(\kappa, \varepsilon, aSa) = \{(\kappa, S)\}$

$\mu(\kappa, \varepsilon, bSb) = \{(\kappa, S)\}$

$\mu(\kappa, \varepsilon, SZ) = \{(\lambda, \varepsilon)\}$

Αποδεικνύεται ότι

Το σύνολο L είναι γλώσσα ΠΑΣ εάν και μόνο εάν το σύνολο L είναι γλώσσα ΕΠΑΣ

Λήμμα: Έστω το ΕΠΑΣ Ε, τότε υπάρχει ένα ΠΑΣ Π για το οποίο ισχύει:

$L(E)=L(\Pi)$

Αποδοχή με κενή στοίβαδα

Θεωρούμε ένα ΠΑΣ ή ΕΠΑΣ $\Pi=(K,\Sigma,\Gamma,\mu,\kappa_0,Z,T)$. Λέμε ότι μια συμβολοσειρά w ανήκει στο K^*, είναι αποδεκτή από το Π με κενή στοίβαδα, όταν

$(\kappa_0, w, Z) \vdash^{+} (\kappa,\varepsilon,\varepsilon)$

για κάποια $\kappa \in K$

Περιγράφουμε με $\Lambda_K(\Pi)$ τις συμβολοσειρές που γίνονται αποδεκτές από ένα Π με κενή στοίβαδα

Λήμμα: Έστω ότι η L είναι η $\Lambda_K(\Pi)$ για κάποιο ΠΑΣ όπου $\Pi=(K,\Sigma,\Gamma,\mu,\kappa_0,Z,T)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ΠΑΣ Ρ' τέτοιο ώστε το $L_K(P')=L$

Λήμμα: Έστω ένα ΠΑΣ $\Pi=(K,\Sigma,\Gamma,\mu,\kappa_0,Z,\varnothing)$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ΠΑΣ Π' τέτοιο ώστε το $\Lambda_K(\Pi')$ να ισούται με το $\Lambda_K(\Pi)$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΓΛΩΣΣΩΝ ΠΑΣ ΚΑΙ

Οι γλώσσες είναι ακριβώς οι γλώσσες ανεξάρτητων συμφραζομένων (ΓΑΣ)

Με το παρακάτω λήμμα κατασκευάζουμε τον φυσικό μη αιτιοκρατικό τεχνολόγο για μία ΓΑΣ

(Ο τεχνολόγος ταυτίζεται με τον αποδέκτη, Ο αποδέκτης λέει αν αποδέχεται ή δεν αποδέχεται την συμβολοσειρά, σύμφωνα με τους κανόνες

Ο τεχνολόγος παίρνει τους κατάλληλους κανόνες ~~γραμματικής~~ και τους εφαρμόζει σε μια συμβολοσειρά έτσι ώστε να φτάσουμε στο S. Αν δεν φτάσουμε ποτέ στο S, τότε δεν είναι αποδεκτή η γλώσσα

Ο τεχνολόγος με βάση στην έννοια της γραμματικής

Ο αποδέκτης με βάση στην έννοια των πεπερασμένων αυτομάτων

(Παράλληλες διαδικασίες

Δίνεται μια γραμματική G ανεξάρτητων συμφραζομένων
Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε ένα ΠΑΣ τέτοιο ώστε $(L_e(R)) = L(G)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω η ΓΑΣ (Γραμματική Ανεξάρτητων Συμφραζομένων):

$$G = (\underbrace{\{S\}}_{V_m}, \underbrace{\{ab\}}_{V_t}, \Pi, S)$$

όπου $\Pi = \{S \to aSb \mid ab\}$

$$R = (K, \Sigma, \Gamma, \mu, K_0, Z, \Phi) \rightsquigarrow R = (\{k\}, \Sigma, V_t \cup \Sigma, \mu, k, S, \Phi)$$

$$
\begin{aligned}
(k, aaabbb, S) &\vdash (k, aaabbb, aSb)\\
&\vdash (k, aabbb, Sb)\\
&\vdash (k, aabbb, aSbb)\\
&\vdash (k, abbb, Sbb)\\
&\vdash (k, abbb, abbb)\\
&\vdash (k, bbb, bbb)\\
&\vdash (k, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

$S \to aSb \to \mu(k, \varepsilon, S) = \{(k, aSb), (k, ab)\}$

για $\sigma = a$ ή b

$$\mu(k, \sigma, \sigma) = \{(k, \varepsilon)\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

Έστω $G = (V_A, V_T, \Pi, S)$

$\Pi = \{ S \rightarrow aAS \mid a,$

$A \rightarrow SbA \mid SS \mid ba \}$

ΝΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΕΙ ΤΟ ΠΑΣ.

5 κανόνες

$\Pi = \{ S \rightarrow \overset{①}{aAS} \mid \overset{②}{a},$

$A \rightarrow \overset{③}{SbA} \mid \overset{④}{SS} \mid \overset{⑤}{ba} \}$

$S \overset{(1)}{\Rightarrow} aAS \overset{(3)}{\Rightarrow} aSbAS \overset{(2)}{\Rightarrow} aabAS \overset{(4)}{\Rightarrow} aabSSS \overset{(2)}{\Rightarrow} aabbaa \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow aba$

$\mu(k, \varepsilon, S) = \{(k, aAS), (k, a)\}$

$\mu(k, \varepsilon, A) = \{(k, SbA), (k, SS), (k, ba)\}$

$\mu(k, a, a) = \{(k, \varepsilon)\}$

$\mu(k, b, b) = \{(k, \varepsilon)\}$

(k, aba, S)

(k, aba, a) | (k, aba, aAS)

$\vdash (k, ba, AS)$

$\vdash (k, aba, SbAS)$

$\vdash (k, aba, abAS)$

$\vdash (k, ba, AS)$

$\vdash (k, ba, baS)$

$\vdash^{+} (k, a, S)$

$\vdash (k, a, a)$

$\vdash (k, \varepsilon, \varepsilon)$

$(k, aba, S) \vdash (k, aba, aAS)$

$\vdash (k, ba, AS)$

$\vdash (k, ba, baS)$

$\vdash^{+} (k, \varepsilon, S)$